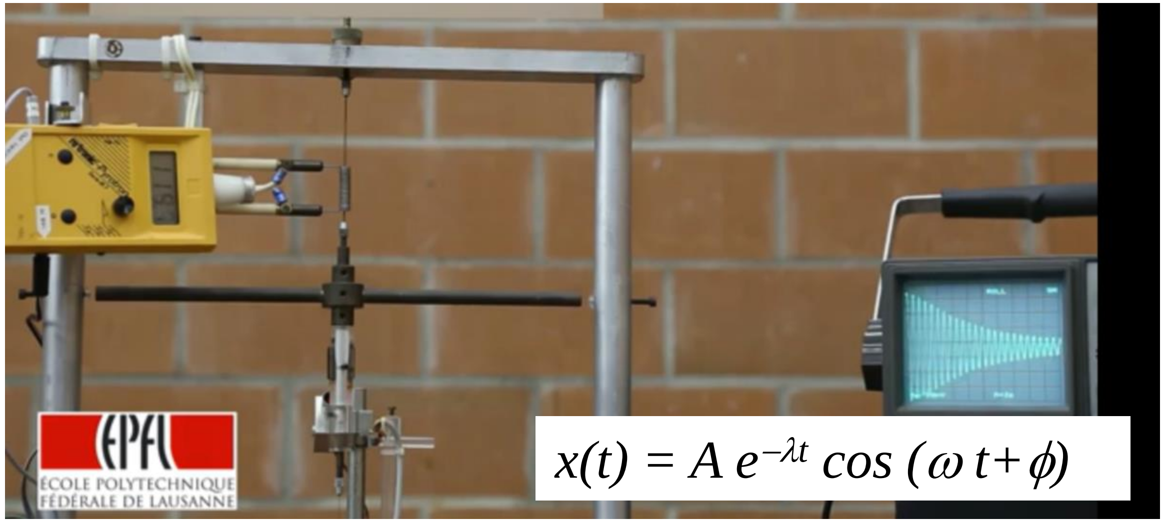
Cours 18 – 14/11/2024

8. L’oscillateur harmonique linéaire

8.7. Oscillateur forcé

8.7. Oscillateur forcé

■ Introduction : entretien d'un oscillateur amorti dans le régime «amortissement faible»



Un oscillateur amorti voit l'amplitude de ses oscillations diminuer. Ceci est la conséquence de la dissipation de l'énergie mécanique du système due au frottement fluide.

On rappelle en effet que si A est l'amplitude des oscillations pour un oscillateur libre, alors l'énergie mécanique de l'oscillateur est $\frac{1}{2}k(amplitude)^2$. Pour un oscillateur amorti, l'amplitude diminue comme $e^{-\lambda t}$ $(\mathrm{E} = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\lambda t})$.

Un oscillateur a une pulsation bien définie $\Rightarrow$ applications (horloge)

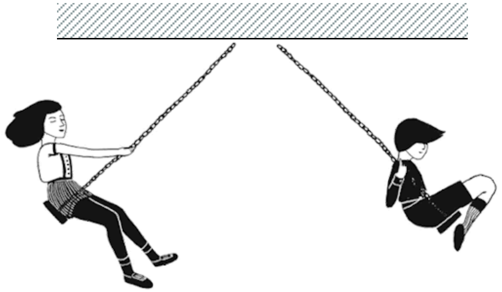
Comment éviter que l'oscillateur ne s'amortisse ?

$\Rightarrow$ on lui apporte de l'énergie $\Rightarrow$ l'oscillateur libre devient alors <u>un oscillateur forcé</u>

8.7. Oscillateur forcé

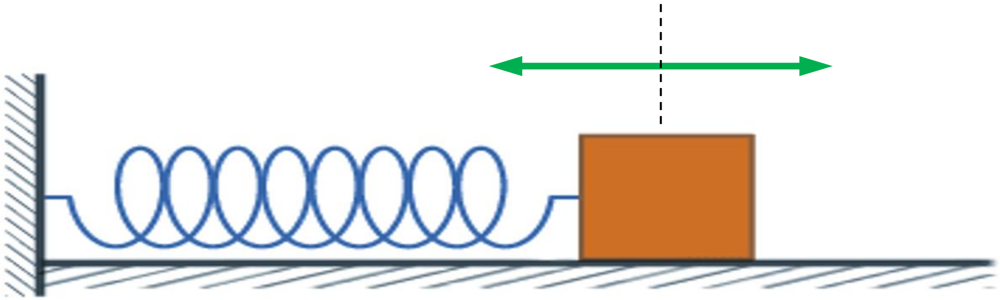
- <u>Introduction</u> : application d'une force périodique sur un oscillateur

Se balancer sur une balançoire peut être considéré comme un oscillateur forcé

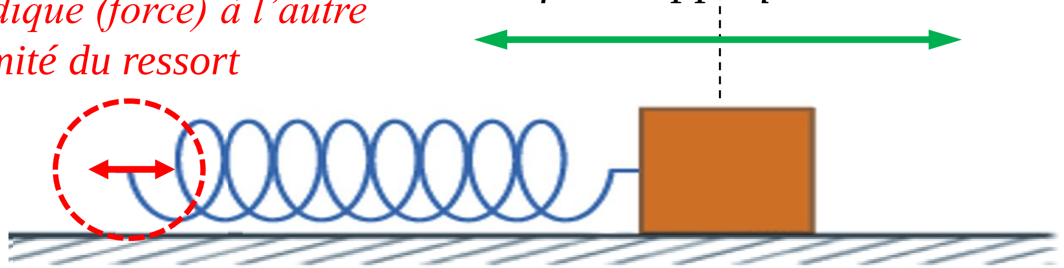


La masse va "réagir" en fonction de la période de la force appliquée

On applique un mouvement périodique (force) à l'autre extrémité du ressort



Oscillateur libre



Oscillateur forcé (avec force périodique)

8.7. Oscillateur forcé

Oscillateur forcé : oscillateur libre soumis à une force externe périodique. L'<u>oscillateur forcé</u> suit <u>la pulsation de la source excitatrice</u> si l'amortissement n'est pas trop fort. Si l'amortissement est très faible, et si la pulsation de la force excitatrice est proche de celle de l'oscillateur libre (ω_0), alors un phénomène de <u>résonance</u> peut se produire.

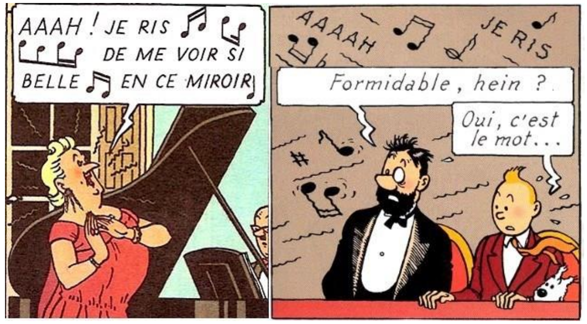
Exemples d'oscillateurs forcés

- *Récepteur (radio et TV)*
- *Instruments de musique*
- *Analyse médicale (RMN)*
- *La voix*

⇨ *phénomène de « résonance »*

Pont de Tacoma (USA) en 1940

Phénomène d'aéroélasticité critique



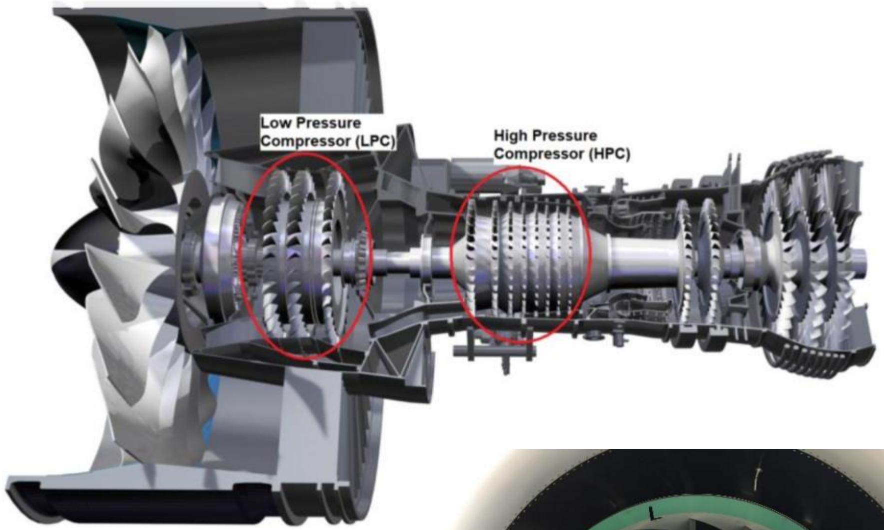
L'affaire Tournesol – Hergé (Casterman)

8.7. Oscillateur forcé

Phénomène de résonance ⇒ Danger!

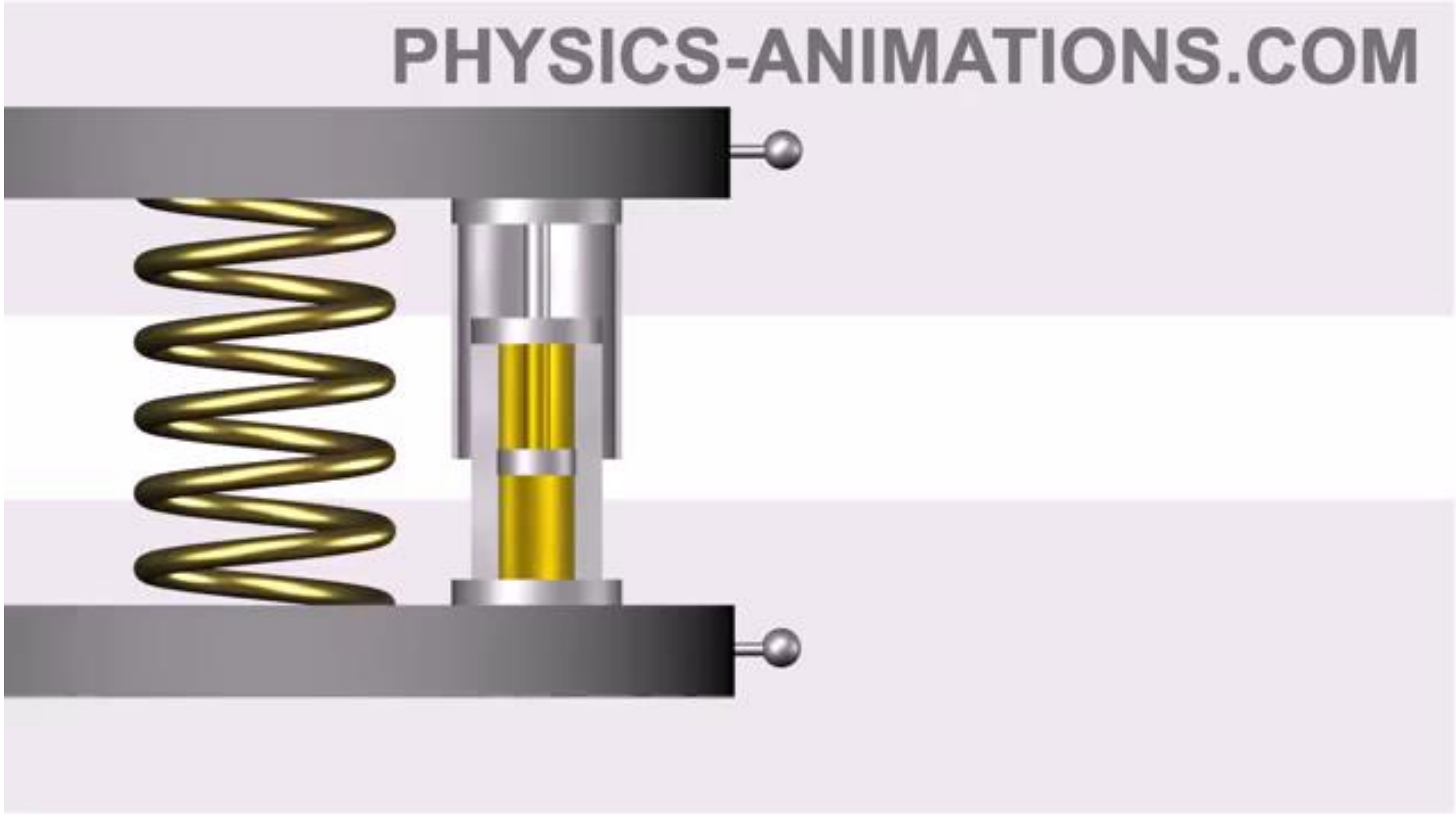
A220 uncontained engine failures linked to resonance phenomenon

By David Kaminski-Morrow | 31 March 2020



8.7. Oscillateur forcé

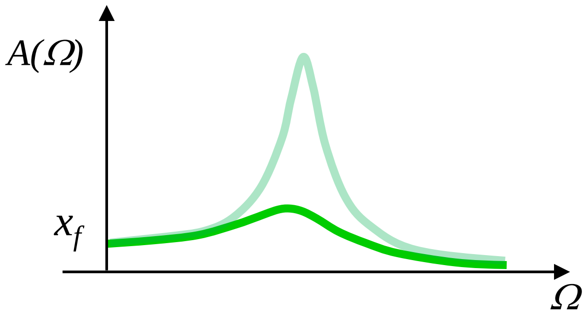
■ Oscillateur forcé avec frottement fluide : amortissement faible

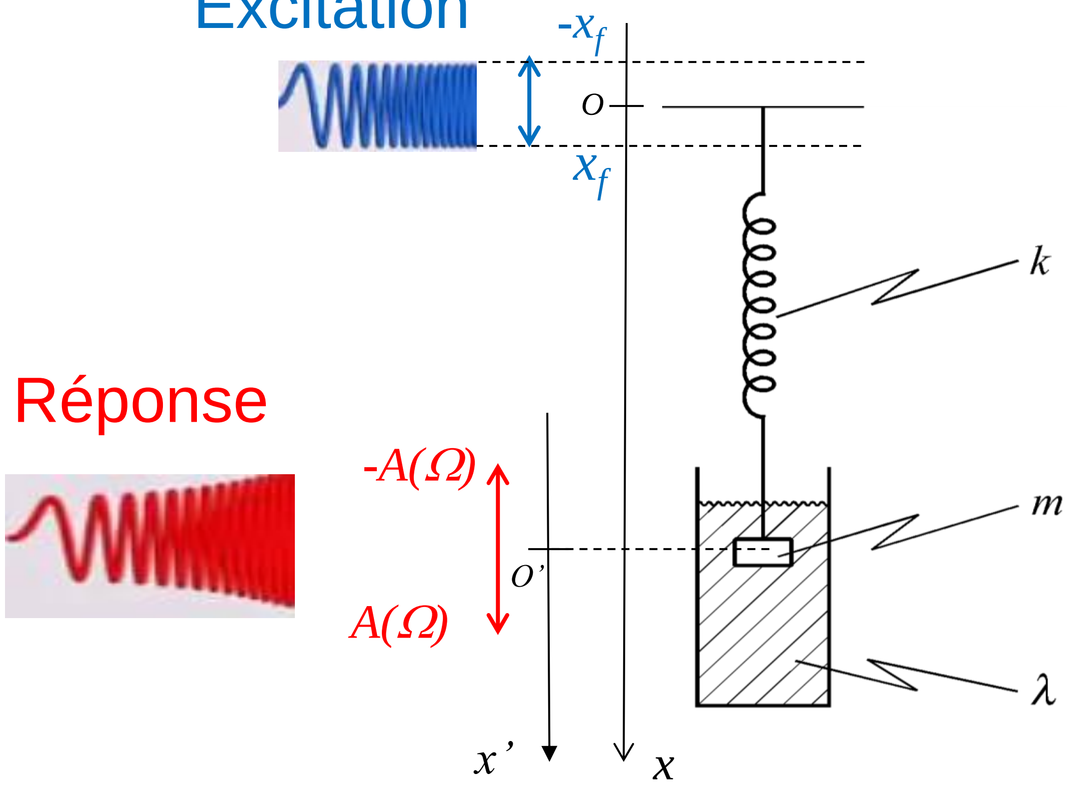


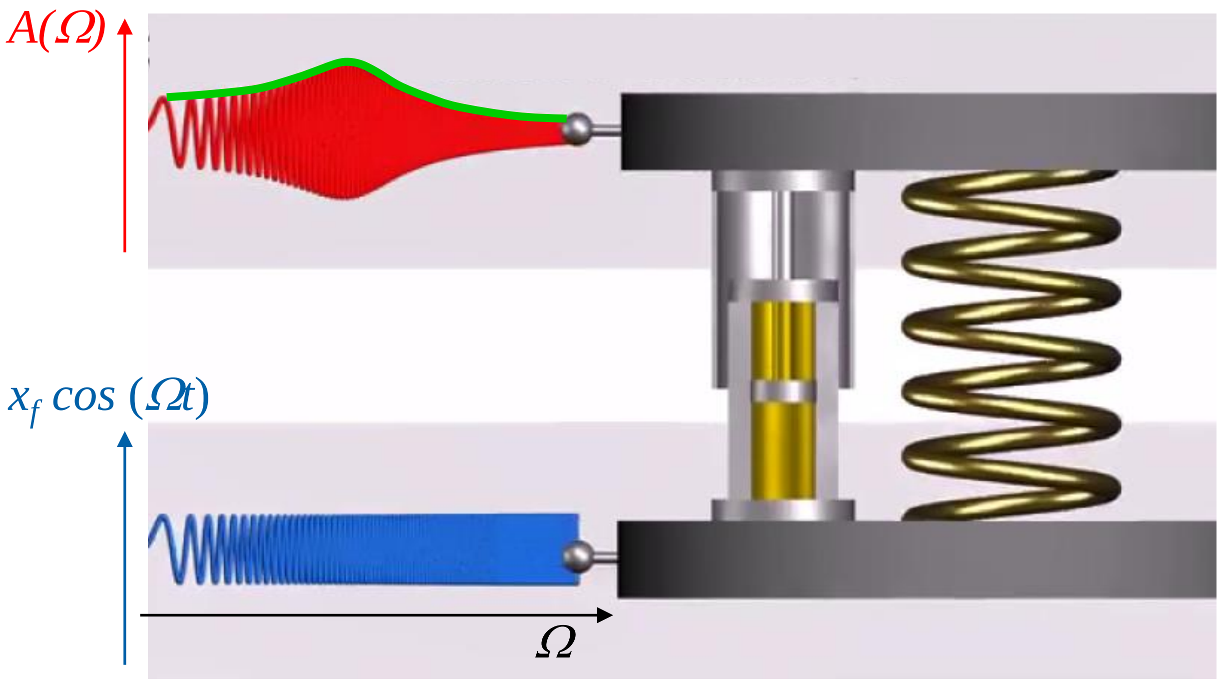
8.7. Oscillateur forcé

Oscillateur amorti forcé avec frottement fluide

Force excitatrice : $\vec{F_e} = k\, x_f \cos(\Omega t)\, \vec{e_x}$ $\begin{cases} x_f & \text{amplitude de la force excitatrice} \\ \Omega & \text{pulsation de la force excitatrice} \end{cases}$







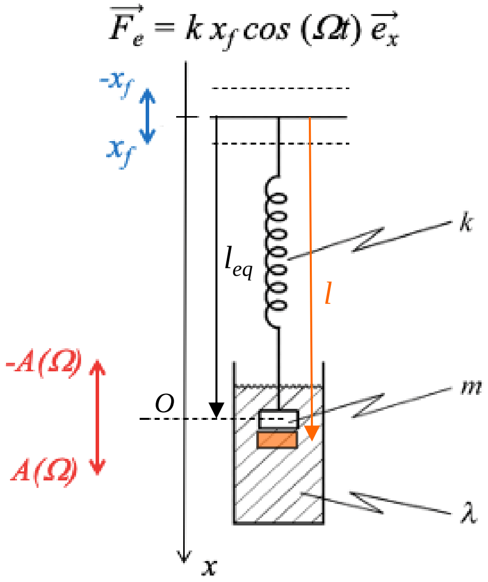
L'amplitude $A(\Omega)$ de la réponse de l'oscillateur dépend de la pulsation Ω de la force excitatrice

On cherche à calculer $A(\Omega)$ et le déphasage entre la force excitatrice F_e et la réponse de l'oscillateur

8.7. Oscillateur forcé

■ Equation différentielle du mouvement d'un oscillateur forcé amorti avec force de frottement fluide laminaire et force excitatrice $\vec{F}_e = F_e \cos(\Omega t)\,\vec{e}_x = k\,x_f \cos(\Omega t)\,\vec{e}_x$

2nd loi de Newton avec projection sur Ox *(on ne prend pas en compte la poussée d'Archimède pour simplifier) :*



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{ext} = mg - k(l - l_0) - K\eta\frac{dx}{dt} + F_e\cos(\Omega t)$$

poids — Force de rappel du ressort — Force de frottement fluide — Force excitatrice appliquée au ressort avec une pulsation Ω

avec x défini par rapport à la position d'équilibre (ressort au repos, $ma = 0$)

$x = l - l_{eq}$ et $l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$ d'où $l - l_0 = x + \frac{mg}{k}$

soit $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - K\eta\frac{dx}{dt} + F_e\cos(\Omega t)$

Equation différentielle du mvt :

$$\boxed{\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x}_{\text{Equation de mvt. de l'oscillateur amorti libre}} = \underbrace{f\cos(\Omega t)}_{\text{Force excitatrice}}}$$

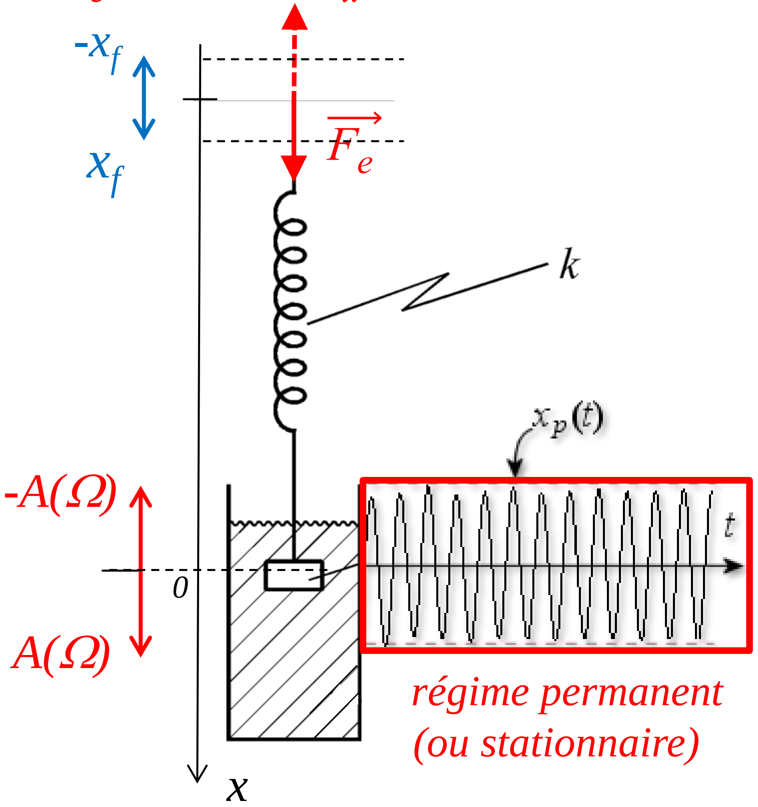
avec
$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{k/m} & \text{Pulsation propre du ressort libre} \\ \lambda = \dfrac{K\eta}{2m} \\ f = \dfrac{F_e}{m} = \dfrac{kx_f}{m} \end{cases}$$

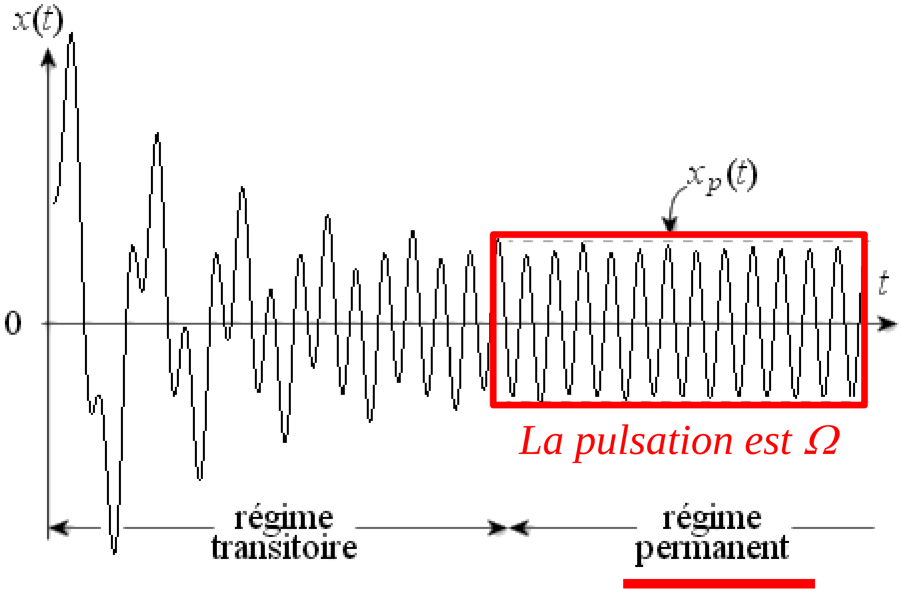
8.7. Oscillateur forcé

■ Evolution du mouvement à partir de $t=0$ pour un oscillateur forcé faiblement amorti

Quand on commence à exciter le ressort ($t=0$), l’oscillateur a un mouvement qui semble “chaotique”. C’est le régime transitoire. Puis le mouvement se stabilise dans un régime parfaitement oscillatoire avec une pulsation Ω qui est celle de la force excitatrice. L’expérience montre que l’amplitude des oscillations dépend alors de Ω. Ce régime “stable” est appelé régime **permanent** ou **stationnaire**.

$\overrightarrow{F_e} = F_e \cos(\Omega t)\,\overrightarrow{e_x}$ *force excitatrice*





Forme des solutions :

$$\boxed{A(\Omega)\cos(\Omega t + \Psi(\Omega))}$$

Régime permanent (stationnaire) : le mouvement de l'oscillateur amorti forcé est alors celui d'un oscillateur harmonique de pulsation égale à la pulsation Ω de l'excitation.

Seul le régime permanent sera étudié dans le cours

8.7. Oscillateur forcé

Forme des solutions en régime permanent (oscillateur faiblement amorti)

En régime permanent, l'oscillateur forcé est un oscillateur harmonique. Les solutions ont alors la forme suivante :

$$\boxed{x(t) = A(\Omega)\, cos(\Omega t + \Psi(\Omega))}$$

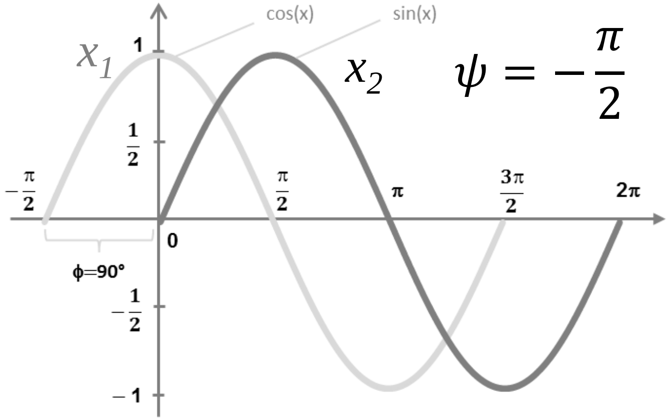
<u>Caractéristiques du mouvement</u> :

- la pulsation de l'oscillateur forcé est celle de la force excitatrice Ω
- l'amplitude $A(\Omega)$ dépend de la pulsation Ω de la force excitatrice
- Le mouvement de l'oscillateur est déphasé de ψ par rapport à l'excitation
- Le déphasage ψ dépend de la pulsation Ω

 Oscillateur mécanique en régime sinusoïdal forcé (univ-nantes.fr)

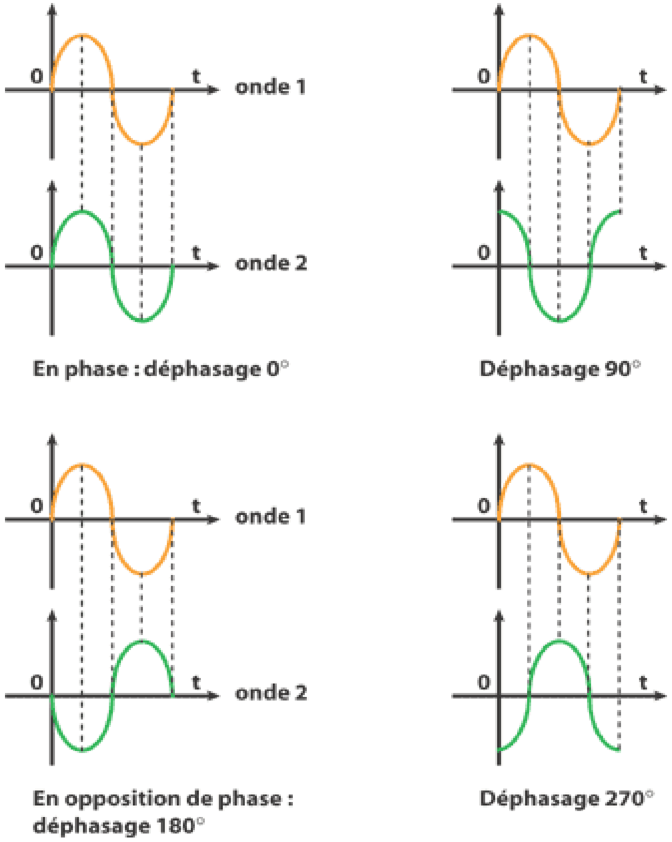
8.7. Oscillateur forcé

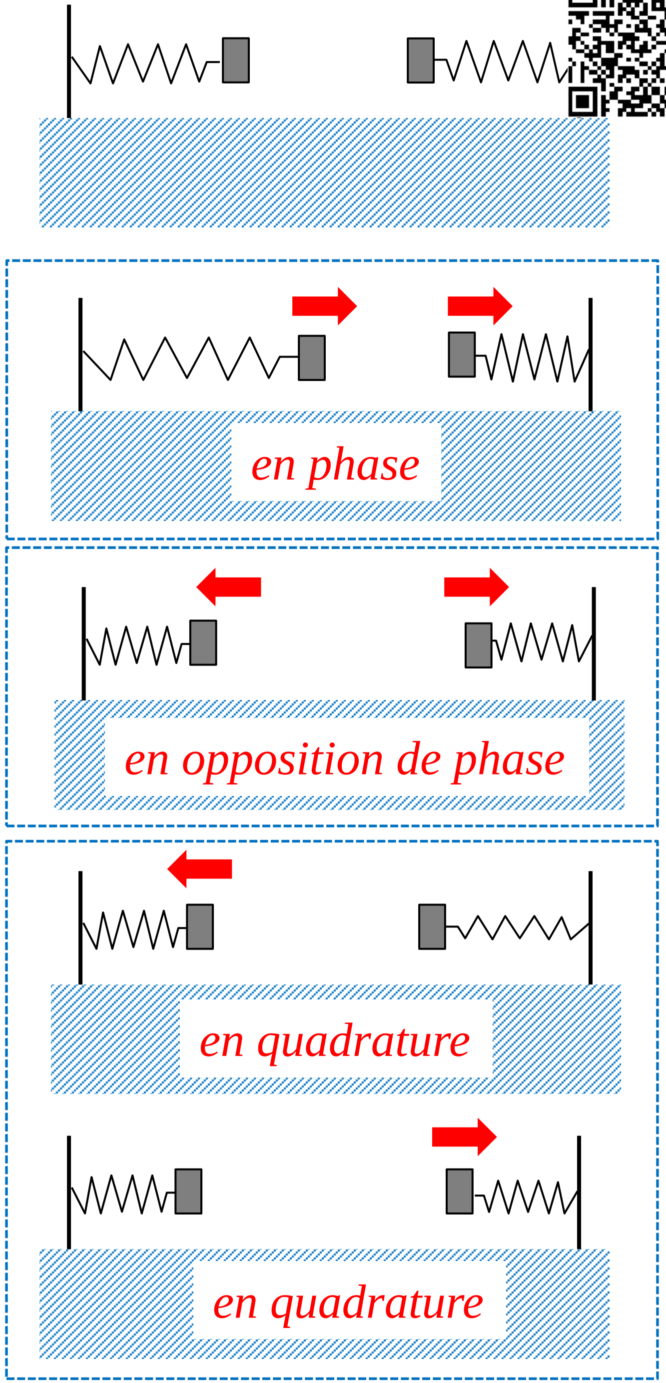
Le déphasage



$$\psi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x_1 = A\ \cos(\Omega t)$$
$$x_2 = A\ \cos(\Omega t + \psi)$$





$\psi = 0$ $\quad l'oscillateur\ et\ la\ force\ sont\ en\ phase$

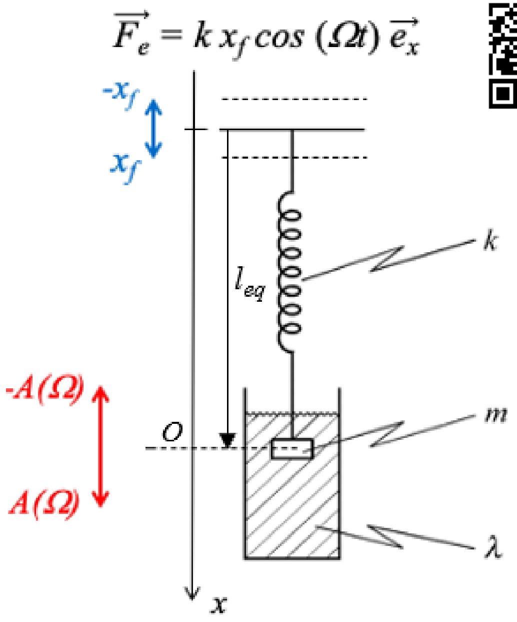
$\psi = \pm\pi$ $\quad l'oscillateur\ et\ la\ force\ sont\ en\ opposition\ de\ phase$

$\psi = \pm\frac{\pi}{2}$ $\quad l'oscillateur\ et\ la\ force\ sont\ en\ quadrature$

8.7. Oscillateur forcé

■ Forme des solutions en régime permanent

Oscillateur amorti forcé soumis à une force excitatrice $\overrightarrow{F_e} = F_e \cos(\Omega t)\, \overrightarrow{e_x}$



$$\boxed{x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \Psi(\Omega))}$$

■ Amplitude A(Ω)

$$A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} = x_f \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} \qquad avec \quad f = \frac{k x_f}{m} \qquad et \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

■ Déphasage ψ(Ω)

$$\psi(\Omega) = \arctan\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

8.7. Oscillateur forcé

■ Pulsation de résonance Ω_r (amplitude maximum pour $\Omega = \Omega_r$)

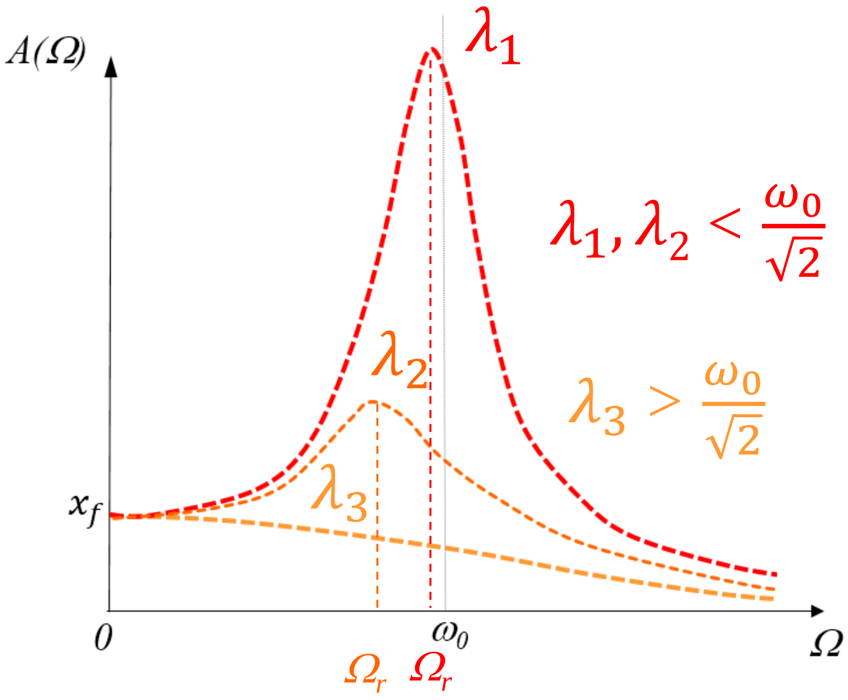
$$\boxed{A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\lambda\Omega\right)^2}}}$$

Maximum de la fonction $A(\Omega)$ $\Rightarrow \dfrac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0$

$$A(\Omega) = f\left(\omega_0^4 + \Omega^4 - 2\omega_0^2\Omega^2 + 4\lambda^2\Omega^2\right)^{-1/2}$$

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0 = f\left(4\Omega^3 - 4\omega_0^2\Omega + 8\lambda^2\Omega\right)\left(\omega_0^4 + \Omega^4 - 2\omega_0^2\Omega^2 + 4\lambda^2\Omega^2\right)^{-3/2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$soit \quad \Omega^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2 = 0$$



Finalement $\boxed{\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}}$ *Pulsation de résonance*

Remarques :

La résonance n'existe que pour $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0$, soit $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

Si $\lambda \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ alors l'amortissement est trop fort et il n'y a plus de résonance. L'amplitude $A(\Omega)$ des oscillations de la masse est alors toujours inférieure à l'amplitude x_f de la force excitatrice.

8.7. Oscillateur forcé

- Pulsation de résonance Ω_r (amplitude maximum pour $\Omega = \Omega_r$)

$$\boxed{\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}}$$